Title	リ-マン面上のBergman核と吹田予想 (再生核の理論とその応用)
Author(s)	大沢, 健夫
Citation	数理解析研究所講究録 (1998), 1067: 89-95
Issue Date	1998-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/62498
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1067 巻 1998 年 89-95

リーマン面上の Bergman 核と吹田予想

大沢 健夫 (名大・多元数理)

T. Ohsawa (Nagoya University)

1. この論説の目的は, 拙著「Addendum to “On the Bergman kernel of hyperconvex domains”, N.M.J. 129 (1993) 43–52」, N.M.J. 137 (1995) 145–148, の要点を, 論理的飛躍や計算の省略をなるべく避けながら, L^2 評価式の方法にあまりなじみのない方々にも抵抗なく読めるような表現で解説することである.

2. 1993 年秋のある晩のことであるが, 筆者はアメリカ合衆国マサチューセッツ州のある大学教授宅の一部屋で, ソファーに寝そべったまま放物型リーマン面について思いを巡らしていた. 11 月末に帰国するまでには 4 年生のセミナーで講読中の本である, 及川広太郎著「リーマン面」に一通り最後まで目を通しておかねばと思って, 研究の合間にその頁を開いているうち, つい引き込まれてしまっていたのであろう. その時, 遠くの方で暗闇に線香の火がともるような感じで見えてきたことをまとめたのが上記の拙論である. そのタイトル通り, これは Bergman 核に関する以前の研究の補足の形で発表したものだが, 以前から谷川晴美氏や山口博史氏らに御注意頂いていた Bergman 核と対数容量との関連が, 筆者にはこの時はじめて明確に理解できたのである. ただし急いで書き上げた論文の方は, 暗闇に慣れた目のままであったためか計算を端折った部分があり, さらにミスプリントも散見されるなど, あまり格好の良いものではない. 従って, ここにその解説を書く機会を得たことは筆者にとってまさに奇貨おくべし, まことにありがたいことである.

3. 問題は, 吹田信之氏による有名な予想である. それは, S をリーマン面, $K_S(z)|dz|^2$, $c_\beta(z)|dz|$ をそれぞれ S の Bergman 核, 対数容量とすると, 不等式

$$\pi K_S(z) \geq c_\beta(z)^2$$

(π は円周率) が成立し, 等号は S が単位円盤に同値な場合に限るというものである. 吹田氏の論文 [Capacities and kernels on Riemann surfaces, Arch. Rational Mech. Anal., 46 (1972) 212–217] では, S が円盤や円環である場合の計算結果をもとに予想が立てられている.

4. リーマン面の Bergman 核, 対数容量の概念は周知であろうが, 一応それらの定義から始めよう.

リーマン面 S 上で 2 乗可積分かつ正則な $(1,0)$ 型微分形式のなす Hilbert 空間を $\mathcal{H}$ とし, S の正則接ベクトル束を $T^{1,0}S$ とする. $\mathcal{H} \neq \{0\}$ のとき, $T^{1,0}S$ 上の非負関数 κ_S を

$$\kappa_S(\xi) = \sup\left\{|\omega(\xi)|^2;\ \omega \in \mathcal{H}, \|\omega\| = 1\right\}$$

によって定義することができる. κ_S を S の Bergman 核という. S の局所座標 z を用いると, κ_S は z の関数 $K_S(z)$ を用いて $K_S(z)|dz|^2$ と書ける. また, $\mathcal{H}$ の完全正規直交系を $\{\sigma_i(z)dz\}_{i=1}^{\infty}$ とすると

$$K_S(z) = \sum_{i=1}^{\infty} |\sigma_i(z)|^2$$

である (後で補足するが, ノルムの入れ方を吹田予想にあわせるとこうなる). $\mathcal{H} = \{0\}$ のときは, S の Bergman 核は 0 であると約束する.

S が Green 関数をもつとき, それを

$$g : S \times S \to (0, \infty]$$

とし, $T^{1,0}S$ 上の非負関数 c_S を

$$c_S(\xi) = \left|d_q e^{-g(p,q)}|_{q=p}(\xi)\right| \qquad (\xi \in T_p^{1,0}S)$$

によって定義することができる. ここで d_q は変数 q に関する外微分を表す. c_S を S の対数容量という. 局所座標を用いて c_S を $c_\beta(z)|dz|$ と書いたとき,

$$-\log c_\beta\Big(z(p)\Big) = \lim_{q \to p}\Big(g(p,q) + \log|z(p) - z(q)|\Big)$$

が成立する. 通常はこの式を対数容量の定義にしているようである. S が Green 関数をもたない時は $c_S = 0$ と約束する.

5. 吹田予想は $\pi\kappa_S \geq c_S^2$ であるが, 拙論の主結果は

$$750\pi\kappa_S \geq c_S^2$$

が成立することを主張するものである. 以下, 論文に沿ってこの不等式の証明を解説させて頂く.

6. p を S の任意の点とし, p のまわりの座標近傍 U と局所座標 z を固定する. $c_S(p) \neq 0$ すなわち $c_\beta(0) \neq 0$ の場合に不等式を証明すれば十分だからそう仮定する. また, Bergman 核の定義より, p における上の不等式の成立は

$$(*) \qquad \begin{cases} B(p) = c_\beta(0)dz|_{z=0} \\ \|B\|^2 \leq 750\pi \end{cases}$$

をみたす S 上の正則 1 形式の存在と同値である. $\|B\|$ の定義は因みに

$$\|B\|^2 = \frac{1}{2}\left|\int_S B \wedge \bar{B}\right|$$

であった. この右辺の $\frac{1}{2}$ は, $z = x + \sqrt{-1}y$ に対し

$$\frac{\sqrt{-1}}{2} dz \wedge d\bar{z} = dx \wedge dy$$

であるという理由による. $U = \{q\,;|z(q)| < 1\} = S$ の場合には, $B = dz$ とおくと $B(0) = dz|_{z=0}$, $\|B\|^2 = \pi$, $c_\beta(0) = 1$ となり, 吹田の計算結果に合致することに注意されたい. 一般の場合の B の構成は, $\bar{\partial}$ 方程式を L^2 評価式つきで解くことにより行なう. そのために, p で $c_\beta(0)dz$ に等しい C^∞ 級の $(1,0)$ 形式を作ることから始めよう.

7. C^∞ 級関数 $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で,

$$\begin{cases} \chi|(-\infty, 1] = 1 \\ \chi|(2,\infty) = 0 \\ \sup\limits_t |\chi'(t)| < 2\log 2 \end{cases}$$

をみたすものが存在することは, $2\log 2 > 1$ より明白. $c_\beta(0) \neq 0$ を仮定したから, S は Green 関数をもつ. それを g とし, $g_p = g(p,\cdot)$ とおく. $g_p(p) = +\infty$ であるから, ε が十分小さな正数のとき関数

$$\chi\left(\frac{-g_p - \log\varepsilon}{\log 2}\right)$$

の台は U に含まれる.

よって

$$b_\varepsilon = \begin{cases} \chi\left(\dfrac{-g_p - \log\varepsilon}{\log 2}\right) c_\beta(0)dz & (U\text{上で}) \\ \\ 0 & (S\backslash U\text{上で}) \end{cases}$$

とおくと, $0 < \varepsilon \ll 1$ のとき b_ε は S 上の C^∞ 級 $(1,0)$ 形式である.

8. b_ε の性質であるが, 明らかに

$$\begin{cases} b_\varepsilon(p) = c_\beta(0)dz|_{z=0} \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|b_\varepsilon\| = 0 \end{cases}$$

が成立する. $(*)$ をみたす B の存在は, 次の主張からただちに従う.

主張 : ある正数 ε_0 が存在して, 任意の $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ に対して S 上の 2 乗可積分な $(1,0)$ 形式 α_ε で以下の条件 (1), (2), (3) をみたすものが存在する.

(1) $\bar{\partial}\alpha_\varepsilon = \bar{\partial}b_\varepsilon$
(2) $\left|\int_U |z|^{-2}\alpha_\varepsilon \wedge \bar{\alpha}_\varepsilon\right| < \infty$
(3) $\|\alpha_\varepsilon\|^2 < 750\pi$.

実際, このような α_ε に対して $B_\varepsilon = b_\varepsilon - \alpha_\varepsilon$ とおき, $\varepsilon \searrow 0$ として B_ε の一つの弱収束部分列をとり, その極限を B とすればよい (論文ではこの部分は端折り過ぎて論理的に誤った表現になっている).

9. さてここからが佳境である. 上のような α_ε の存在を保証する L^2 評価式というものは, ノルムの計り方を工夫すれば, 見つかる時には見つかるが, 見つからない時には 10 年かけても徒労に終わる. 次は上の主張をほとんど言いかえたに過ぎないようだが, 適切なノルムの候補を一生懸命絞っているのである.

命題. 任意の正数 ε に対し, 正数 δ, C^∞ 級関数 $\rho : S\backslash\{p\} \to (0,\infty)$, および $S\backslash\{p\}$ 上の Hermite 計量 ds^2 で次の (i), (ii), (iii) をみたすものが存在する.

(i) S 上の任意の 2 乗可積分 $(1,0)$ 形式 α に対し,

$$\delta\left|\int_U |z|^{-2}\alpha\wedge\bar{\alpha}\right| + \left|\int_S \alpha\wedge\bar{\alpha}\right| \leq 16\left|\int_S \rho\,\alpha\wedge\bar{\alpha}\right|$$

(ii) $S\backslash\{p\}$ 上の C^∞ 級 $(1,1)$ 形式 β で

$$\operatorname{supp}\beta \subset \{q\,;\log 2 < g(p,q) + \log\varepsilon < 2\log 2\}$$

をみたすものに対し, S 上の 2 乗可積分 $(1,0)$ 形式 α で, $\bar{\partial}\alpha = \beta$ かつ

$$\left|\int_S \rho\,\alpha\wedge\bar{\alpha}\right| \leq \int_{S\backslash\{p\}} e^{2g_p}\,|\beta|^2\,d\mathrm{vol}$$

をみたすものが存在する. ただし $|\beta|$, $d\mathrm{vol}$ はそれぞれ ds^2 に関する β の長さ (*i.e.* 点ごとのノルム) および体積要素を表す.

(iii) $\displaystyle\int_{S\backslash\{p\}} e^{2g_p}\,|\bar{\partial}b_\varepsilon|^2\,d\mathrm{vol} < 64\pi$

(論文では ρ と ds^2 の定義域が S になっているが, ミスプリントである. 不等式にあらわれる数字もおかしい.)

この命題から主張が従うことは明白であろう (ノルムの定義に注意. 実際は 750π より小さい $2^9\pi = 512\pi$ で十分であった).

10. ρ と ds^2 の間にどんな関係があれば (ii) が成り立つかということは, 一般論でかなりわかる. これは多変数複素解析の一つの成果なのだが, リーマン面の場合に限って簡略化して述べると次のようになる.

定理 [On the extension of L^2 holomorphic functions III — negligible weights, Math. Z. 219 (1995) 215–225, Theorem 1.7 より]

X をリーマン面, φ を X 上の C^∞ 級実数値関数, ds^2 を X 上の C^∞ 級 Hermite 計量, dV を ds^2 に付随した体積要素とする. もし X 上に C^∞ 級正値有界関数 η で $\eta \geq 1$ かつ

$$(\star) \qquad \sqrt{-1}\Big(\eta\partial\bar{\partial}\varphi - \partial\bar{\partial}\eta - \eta^{-2}\partial\eta \wedge \bar{\partial}\eta\Big) \geq 2dV$$

をみたすものが存在すれば, X 上の $(1,1)$ 形式 v で

$$\|v\|_\varphi^2 := \int_X e^{-\varphi}\,|v|^2\,dV < \infty$$

をみたすものに対して X 上の $(1,0)$ 形式 u で

$$\bar{\partial}(\eta u) = v$$

かつ

$$\left|\int_X e^{-\varphi}\,u \wedge \bar{u}\right| \leq \|v\|_\varphi^2$$

をみたすものが存在する.

注意. 局所座標を使って Hermite 計量と体積要素の関係を書くと

$$ds^2 = adzd\bar{z} \iff dV = \frac{\sqrt{-1}}{2}adz \wedge d\bar{z}$$

である. 体積要素の長さを 1 に正規化する必要から

$$|dz|^2 = 2a^{-1}$$

で dz の長さを定める. 従って上のノルム $\| \ \|_\varphi$ の定義を $(1,0)$ 形式 u に対してあてはめると

$$\|u\|_\varphi^2 = \left|\int_X e^{-\varphi}\,u \wedge \bar{u}\right|$$

となることに注意しよう.

11. 上の定理を $X = S\backslash\{p\}$ に対して適用する.

$$ds^2 = 4e^{-2g_p}\varepsilon^2(e^{-2g_p} + \varepsilon^2)^{-2}\partial g_p \bar{\partial} g_p$$

とおく. これに対して, まず (iii) の不等式が成立することを確かめよう.

$\displaystyle\int_{S\backslash\{p\}} e^{2g_p}\,|\bar{\partial}b_\varepsilon|^2 d\mathrm{vol}$ の評価 : U 上で

$$\bar{\partial}b_\varepsilon = \frac{-\bar{\partial}g_p}{\log 2}\,\chi'\left(\frac{-g_p - \log\varepsilon}{\log 2}\right)c_\beta(0) \wedge dz$$

である. $|\chi'| < 2\log 2$ だったから

$$|\bar\partial b_\varepsilon|^2 < 4c_\beta(0)^2|\bar\partial g_p|^2|dz|^2.$$

定理の後の注意から

$$|\bar\partial g_p|^2 = \frac{2}{4e^{-2g_p}\varepsilon^2(e^{-2g_p}+\varepsilon^2)^{-2}}.$$

また, $g_p + \log|z| =: h$ とおくと, h は U 上で調和であるから, $\partial g_p + dz/2z = \partial h$ であることより

$$\lim_{z\to 0}\frac{|dz|^2}{4\,|z|^2\,|\partial g_p|^2} = 1$$

を得る ($\lim_{z\to 0} ds^2/dzd\bar z = \infty$ に注意).

ゆえに

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int e^{2g_p}\,|\bar\partial b_\varepsilon|^2\,d\mathrm{vol}\\
&< \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\left|\int_{\log 2<\log\varepsilon+g_p<2\log 2} 8|z|^2c_\beta(0)^2e^{4g_p}\varepsilon^{-2}(e^{-2g_p}+\varepsilon^2)^2\partial g_p\wedge\bar\partial g_p\right|\\
&= 8\,\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\left|\int_{\frac{\varepsilon}{4}<e^{-g_p}<\frac{\varepsilon}{2}} e^{2g_p}\varepsilon^{-2}(e^{-2g_p}+\varepsilon^2)^2\partial g_p\wedge\bar\partial g_p\right|\\
&= 8\,\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\left|\int_{\frac{\varepsilon}{4}<e^{-g_p}<\frac{\varepsilon}{2}} e^{4g_p}\varepsilon^{-2}(e^{-2g_p}+\varepsilon^2)^2\partial e^{-g_p}\wedge\bar\partial e^{-g_p}\right|\\
&= 16\pi\,\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int_{\frac{\varepsilon}{4}}^{\frac{\varepsilon}{2}}\frac{(t^2+\varepsilon^2)^2}{2\varepsilon^2t^3}dt\\
&\qquad\left(\because\ \partial|z|\wedge\bar\partial|z| = \frac{dz\wedge d\bar z}{4}\right)\\
&< 16\pi\left(\frac{3}{64}+\log 2+3\right)\\
&< 64\pi.
\end{aligned}$$

(という訳で, (iii) の評価式の係数は大ざっぱである.)

12. 定理を $\varphi = -2g_p$ に対して適用したい. g_p は $S\backslash\{p\}$ 上で調和だから, 条件式 $(\star)$ は

$$\sqrt{-1}(-\partial\bar\partial\eta - \eta^{-2}\partial\eta\wedge\bar\partial\eta) \geq 2dV$$

となる.

$$\eta = -\log(e^{-2g_p-e}+e^{-e}\varepsilon^2) + \log(-\log(e^{-2g_p-e}+e^{-e}\varepsilon^2))$$

とおいて上式の左辺を計算する (論文では $\eta = -\log(e^{-2(g_p+1)}+\varepsilon^2)+\log(-\log(e^{-2(g_p+1)}+\varepsilon^2))$ とおいているが, これは多分ミスプリント以上の誤りである). η は $1+\varepsilon^2 < e^e$ なる ε に対して定義され, $\varepsilon^2 < e^{-1}-e^{-2}$ のとき $\eta \geq 1$ である. よってこのとき η は他の条件をみたす.

$$\psi = \log(e^{-2g_p-e}+e^{-e}\varepsilon^2)$$

とおく. すると $\eta = -\psi + \log(-\psi)$ であり

$$-\partial\bar{\partial}\eta = \partial\bar{\partial}\psi - \psi^{-1}\partial\bar{\partial}\psi + \psi^{-2}\partial\psi \wedge \bar{\partial}\psi$$

かつ

$$\eta^{-2}\partial\eta \wedge \bar{\partial}\eta = (\psi - \log(-\psi))^{-2}(1-\psi^{-1})^2\partial\psi \wedge \bar{\partial}\psi.$$

(論文ではこの右辺に現れる $\psi - \log(-\psi)$ が $\psi + \log(-\psi)$ になっているが, ミスプリントである.)

従って, $-\log(-\psi) > 1$ であることから

$$\psi^{-2}\partial\psi \wedge \bar{\partial}\psi \geq (\psi - \log(-\psi))^{-2}(1-\psi^{-1})^2\partial\psi \wedge \bar{\partial}\psi$$

なので

$$-\sqrt{-1}\,(\partial\bar{\partial}\eta + \eta^{-2}\partial\eta \wedge \bar{\partial}\eta) \geq \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\psi.$$

一方

$$\begin{aligned}\partial\bar{\partial}\psi &= \partial\bar{\partial}\log(e^{-2g_p} + \varepsilon^2)\\ &= 4\varepsilon^2(e^{-2g_p} + \varepsilon^2)^{-2}e^{-2g_p}\partial g_p \wedge \bar{\partial}g_p.\end{aligned}$$

よって $(\star)$ が成立する.

従って定理によれば $\rho = e^{2g_p}\eta^{-2}$ に対して (ii) が成立することになる. この ρ に対して (i) を検証しよう.

$$\lim_{z\to 0}|z|^2 e^{2g_p}\eta^{-2} > 0$$

だから

$$\sup \rho^{-1} < 16$$

を示せば十分であるが, 実際

$$\begin{aligned}\sup \rho^{-1} &= \sup_{t>0} e^{-2t}\left(-\log(e^{-2t-e} + e^{-e}\varepsilon^2) + \log(-\log(e^{-2t-e} + e^{-e}\varepsilon^2))\right)^2\\ &\leq \sup_{T>e} e^{e-T}(T + \log T)^2\\ &\leq \sup_{T>e} e^{e-T}\left(1 + \frac{1}{e}\right)^2 T^2\\ &= (e+1)^2 < 16\end{aligned}$$

だからよい.

後記 : 係数が 750π より大きくならなくて良かった. やれやれ.